Univerzitet u Zenici
Politehnički fakultet
Odsjek: Građevinarstvo
Zenica, 29.11.2013.

Prvi parcijalni iz Inžinjerske matematike III

Napomena: Svaku formulu koju mislite koristit, u sva 4 zadatka, obavezno napisati, kao i značenja simbola iz formule. Ispit pisati isključivo hemiskom olovkom plave ili crne tinte. Prije rješenja prepisati postavku (tekst) zadatka.

1. Metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda rješiti sljedeći sistem

$$\begin{aligned} -\dot{x} - x + \dot{y} &= \sin t \\ \dot{x} - x + y &= e^{2t} \end{aligned}$$

2. Metodom varijacije konstanti riješiti dati sistem linearnih jednačina

$$\begin{aligned} \dot{x} &= 3x + 3y + \sin t \\ \dot{y} &= -x - y - \sin t \\ \dot{z} &= -x - 3y + 2z + 4\sin t \end{aligned}$$

3. Primjenom Laplaceove transformacije izračunati integral $\displaystyle\int_0^\infty te^{-3t} \sin t \, dt$.

4. Primjenom Laplaceove transformacije rješiti diferencijalnu jednačinu

$$ty'' + (3t-1)y' + 3y = 0; \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

(#) Metodom svođenja na jednu diferencijalnu jednačinu višeg reda riješiti sljedeći sistem

$$-\dot{x}-x+\dot{y}=\sin t$$
$$\dot{x}-x+y=e^{2t}$$

Rj.

$$(-D-1)x+Dy=\sin t$$
$$(D-1)x+y=e^{2t} \quad /D$$

$$(-D-1)x+Dy=\sin t \quad \dots(I)$$
$$(D^2-D)x+Dy=2e^{2t} \quad \dots(II)$$

$$(I)-(II) \quad (-D-1-D^2+D)x=\sin t-2e^{2t} \quad (-1)$$

$$(D^2+1)x=2e^{2t}-\sin t$$

$$\ddot{x}+x=2e^{2t}-\sin t \quad \dots(*)$$

ovo je linearna diferencijalna jednačina drugog reda po x-u sa konstantnim koeficijentima i opšte rješenje možemo odrediti npr. metodom neodređenih koeficijenata

$$x=x_h+x_p$$

$$\ddot{x}+x=0$$
$$\lambda^2+1=0$$
$$\lambda_{1,2}=\pm i$$

Ako su $\lambda_{1,2}=\alpha\pm\beta i$ korijeni karakteristične jednačine tada je $y_h=e^{\alpha x}(C_1\cos\beta x+C_2\sin\beta x)$

$$\alpha=0,\ \beta=1 \Rightarrow x_h=C_1\cos t+C_2\sin t$$

Izraz $\sin t$ sa desne strane diferencijalne jednačine $(*)$ se pojavljuje u x_h i njemu odgovara korijen $\lambda=\pm 1$

višestrukosti 1, pa pored e^{2t} diferenciramo f-ju $\sin t$.

$$x_p = A\, t\sin t + B\, t\cos t + C\sin t + D\cos t + E e^{2t}$$

$$\boxed{(t\sin t)' = \sin t + t\cos t, \quad (t\cos t)' = \cos t - t\sin t}$$

$$\dot{x}_p = A(\sin t + t\cos t) + B(\cos t - t\sin t) + C\cos t - D\sin t + 2E e^{2t}$$

$$\dot{x}_p = A\, t\cos t - B\, t\sin t + (A-D)\sin t + (B+C)\cos t + 2E e^{2t}$$

$$\ddot{x}_p = A(\cos t - t\sin t) - B(\sin t + \boxed{t\cos t}) + (A-D)\cos t - (B+C)\sin t + 4E e^{2t}$$

$$\ddot{x}_p = -A\, t\sin t - B\, t\cos t + (-2B-C)\sin t + (2A-D)\cos t + 4E e^{2t}$$

Sad prema $(*)$ imamo:

$$-2B\sin t + 2A\cos t + 5E e^{2t} = 2e^{2t} - \sin t$$

$$\Rightarrow \quad \begin{aligned} -2B &= -1 \\ 2A &= 0 \\ 5E &= 2 \end{aligned} \quad \Rightarrow \quad B = \frac{1}{2}, \; A = 0, \; E = \frac{2}{5}$$

C i D proizvoljno, a kako je $C_1\cos t + C_2\sin t$ već u x_h, C i D uopšte nije potrebno

$$x(t) = C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{1}{2}t\cos t + \frac{2}{5}e^{2t} \qquad \ldots(1)$$

F-ju $y(t)$ možemo odrediti iz druge jednačine sistema

$$y = e^{2t} + x - \dot{x} = e^{2t} + C_1\cos t + C_2\sin t + \frac{1}{2}t\cos t + \frac{2}{5}e^{2t}$$
$$- \left(-C_1\sin t + C_2\cos t + \frac{1}{2}\cos t - \frac{1}{2}t\sin t + \frac{4}{5}e^{2t}\right)$$

$$y(t) = (C_1 - C_2)\cos t + (C_1 + C_2)\sin t + \frac{1}{2}t\cos t + \frac{1}{2}t\sin t - \frac{1}{2}\cos t + \frac{3}{5}e^{2t} \quad \ldots(2)$$

Opšte rješenje sistema su (1) i (2).

(#) Metodom varijacije konstanti riješiti dati sistem linearnih jednačina

$$\dot{x} = 3x + 3y + \sin t$$
$$\dot{y} = -x - y - \sin t$$
$$\dot{z} = -x - 3y + 2z + 4\sin t$$

Rj: Rješimo prvo odgovarajući homogeni sistem

$$\dot{x} = 3x + 3y$$
$$\dot{y} = -x - y$$
$$\dot{z} = -x - 3y + 2z$$

Matrica sistema je $A = \begin{bmatrix} 3 & 3 & 0 \\ -1 & -1 & 0 \\ -1 & -3 & 2 \end{bmatrix}$.

$$\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 & 0 \\ -1 & -1-\lambda & 0 \\ -1 & -3 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & 3 \\ -1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(\lambda^2 - 2\lambda - 3 + 3) = -\lambda(\lambda-2)^2$$

Karakteristična jednačina sistema je $-\lambda(\lambda-2)^2 = 0$, a njezini korijeni su $\lambda_1 = 0$ i $\lambda_2 = 2$.
Kako je $\lambda_2 = 2$ korijen višestrukosti 2, opšte rješenje homogenog sistema tražimo u obliku

$$\begin{bmatrix} A_1 \\ A_2 \\ A_3 \end{bmatrix} e^{\lambda_1 t} + \begin{bmatrix} P_k(t) \\ Q_k(t) \\ R_k(t) \end{bmatrix} e^{\lambda_2 t}$$

gdje su P_k, Q_k i R_k polinomi reda k, a $k = r + s - n$ gdje je

- r rang matrice $A-\lambda_2 I$
- s višestrukost korijena
- n red sistema .

$$A-\lambda_2 I = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \quad r=1$$

Kako je $s=2$ i $n=3$ to je

$k = 1+2-3 = 0 \quad \Rightarrow$

$$\begin{aligned} x &= A_1 + B_1 e^{2t} \\ y &= A_2 + B_2 e^{2t} \\ z &= A_3 + B_3 e^{2t} \end{aligned} \qquad \ldots (1)$$

Ako (1) uvrstimo u sistem dobićemo

$$2B_1 e^{2t} = (3A_1+3A_2) + (3B_1+3B_2)e^{2t}$$
$$2B_2 e^{2t} = (-A_1-A_2) + (-B_1-B_2)e^{2t}$$
$$2B_3 e^{2t} = (-A_1-3A_2+2A_3) + (-B_1-3B_2+2B_3)e^{2t}$$

$$\begin{aligned} 3A_1+3A_2 &= 0 \\ -A_1-A_2 &= 0 \\ -A_1-3A_2+2A_3 &= 0 \end{aligned} \qquad \begin{aligned} B_1+3B_2 &= 0 \\ -B_1-3B_2 &= 0 \\ -B_1-3B_2 &= 0 \end{aligned}$$

... ZA VJEŽBU $\qquad\qquad$ ⋮ ZA VJEŽBU

$$\begin{aligned} A_1 + A_3 &= 0 \\ A_2 - A_3 &= 0 \end{aligned} \qquad B_1 + 3B_2 = 0$$

Tri promjenjive uzimamo proizvoljno

$A_3 = C_1$

$B_2 = C_2$

$B_3 = C_3$

Opšte rješenje homogenog sistema je

$$x_h = -C_1 - 3C_2 e^{2t}$$
$$y_h = C_1 + C_2 e^{2t}$$
$$z_h = C_1 + C_3 e^{2t}$$

Sada ćemo metodom varijacije konstanti tražiti opšte rješenje datog nehomogenog sistema u obliku

$$x(t) = -C_1(t) - 3C_2(t)\, e^{2t}$$
$$y(t) = C_1(t) + C_2(t)\, e^{2t}$$
$$z(t) = C_1(t) + C_3(t)\, e^{2t}$$

pri čemu izvode C_1', C_2' i C_3' f-ja $C_1(t)$, $C_2(t)$ i $C_3(t)$ određujemo iz sistema

$$-C_1' - 3C_2' e^{2t} = \sin t$$
$$C_1' + C_2' e^{2t} = -\sin t$$
$$C_1' + C_3' e^{2t} = 4\sin t$$

C_1', C_2' i C_3' su nepoznate f-je i ovaj sistem možemo rješiti npr. Kroneker-Kapelijevom metodom

$$\left[\begin{array}{ccc|c} -1 & -3e^{2t} & 0 & \sin t \\ 1 & 1\cdot e^{2t} & 0 & -\sin t \\ 1 & 0 & e^{2t} & 4\sin t \end{array}\right] \sim \underset{\text{ZA VJEŽBU}}{\ldots} \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & -\sin t \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 5e^{-2t}\sin t \end{array}\right]$$

$\Rightarrow \quad C_1' = -\sin t, \quad C_2' = 0, \quad C_3' = 5e^{-2t}\sin t$

Integracijom ovih jednačina dobijamo

$$C_1 = \cos t + D_1$$
$$C_2 = D_2$$
$$C_3 = -e^{-2t}(\cos t + 2\sin t) + D_3$$

Opšte rješenje datog sistema je

$$x(t) = -\cos t - D_1 - 3D_2 e^{2t}$$
$$y(t) = D_1 + D_2 e^{2t} + \cos t$$
$$z(t) = D_1 + D_3 e^{2t} + \cancel{\cos t} - \cancel{\cos t} - 2\sin t$$

(#) Primjenom Laplasove transformacije izračunati integral $\int_0^{\infty} t e^{-3t} \sin t . dt$.

Rj: Prema definiciji Laplasove transformacije

$$\mathcal{L}\{f(t)\}(s) = \int_0^{\infty} e^{-st} f(t)\, dt$$

pa je $\mathcal{L}\{t \sin t\}(s) = \int_0^{\infty} t e^{-st} \sin t\, dt$ iz čega slijedi

$$\mathcal{L}\{t \sin t\}(3) = \int_0^{\infty} t e^{-3t} \sin t\, dt,$$

pa je dati integral jednak vrijednosti $\mathcal{L}\{t \sin t\}(3)$.

Kako je $\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s)$ to je

$$\mathcal{L}\{t \sin t\}(s) = (-1) \frac{d}{ds}\left(\frac{1}{s^2+1}\right) = (-1)(-1)(s^2+1)^{-2} \cdot 2s = \frac{2s}{(s^2+1)^2}$$

$$\mathcal{L}\{t \sin t\}(3) = \frac{2 \cdot 3}{10^2} = \frac{2 \cdot 3}{100} = \frac{3}{50}.$$

Prema tome

$$\int_0^{\infty} t e^{-3t} \sin t\, dt = \frac{3}{50}$$

(#) Primjenom Laplasove transformacije riješiti diferencijalnu jednačinu $ty'' + (3t-1)y' + 3y = 0$; $y(0) = 0$, $y'(0) = 0$.

Rj.

$$\mathcal{L}\{y'(t)\}(s) = sY(s) - y(0) = sY(s) \quad \text{gdje je } \mathcal{L}\{y\}(s) = Y(s),$$

$$\mathcal{L}\{y''(t)\}(s) = s^2 Y(s) - sy(0) - y'(0) = s^2 Y(s)$$

Prema osobinama Laplasovih transformacija znamo da je

$$\underline{\mathcal{L}\{t^n f(t)\}(s) = (-1)^n \frac{d^n}{ds^n} F(s),} \quad \text{gdje } F(s) = \mathcal{L}\{f\}(s)$$

pa je

$$\mathcal{L}\{ty''\}(s) = (-1)^1 \frac{d}{ds}\left(s^2 Y(s)\right) = (-1)\left(2sY(s) + s^2 Y'(s)\right)$$
$$= -2sY(s) - s^2 Y'(s)$$

$$\mathcal{L}\{(3t-1)y'\} = 3\mathcal{L}\{ty'\}(s) - \mathcal{L}\{y'\} = 3(-1)^1 \underbrace{\frac{d}{ds}\left(sY(s)\right)}_{Y(s) + sY'(s)} - sY(s)$$
$$= -3Y(s) - 3sY'(s) - sY(s)$$

Prema tome

$$ty'' + (3t-1)y' + 3y = 0 \quad /\mathcal{L}$$

$$-2sY(s) - s^2 Y'(s) - \cancel{3Y(s)} - 3sY'(s) - sY(s) + \cancel{3Y(s)} = 0$$

$$(-s^2 - 3s)Y'(s) - 3sY(s) = 0 \quad /:(-s^2 - 3s)$$

$$Y'(s) + \frac{3s}{s^2 + 3s} Y(s) = 0 \quad \text{ovo je diferencijalna jednačina sa razdvojenim promjenjivim}$$

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{3s}{s^2+3s} = -\frac{3}{s+3}$$

$$\frac{Y'(s)}{Y(s)} = -\frac{3}{s+3} \quad \Big/ \int$$

$$\int \frac{d(Y(s))}{Y(s)} = -3 \int \frac{d(s+3)}{s+3}$$

$$\ln Y(s) = (-3)\ln(s+3) + \ln C_1$$

$$Y(s) = \frac{C_1}{(s+3)^3}$$

Iz tabele Laplasovih transformacija $\mathcal{L}\{t^2 e^{-3t}\} = \frac{2!}{(s+3)^3}$

Prema tome

$$y(t) = C t^2 e^{-3t}, \quad \text{za} \quad C \neq 0$$

traženo rješenje